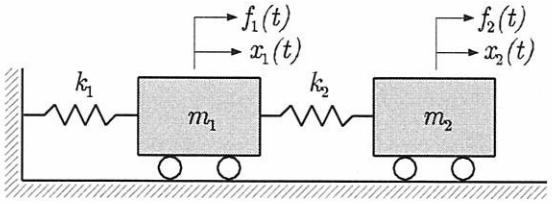
1) (2 val.) As equações de movimento de um sistema linear discreto com n graus de liberdade são do tipo $[m]\{\ddot{q}(t)\}+[c]\{\dot{q}(t)\}+[k]\{q(t)\}=\{f(t)\}$

a) (30%) Definir coordenadas generalizadas e coordenadas naturais ou modais.

b) (35%) Caracterizar, justificando, as formas quadráticas associadas à energia cinética e à energia potencial elástica e, respectivamente, as matrizes de massa e de rigidez.

c) (35%) Definir: i)modo natural de vibração; ii) forma natural de vibração; iii) nodo de vibração.



2) (1.5 val.) Os vectores modais representativos das formas naturais de vibração de um sistema linear discreto não amortecido e com dois graus de liberdade representado na figura são: $\{u\}_1^T=\{1 \;\; 1.5\}^T$ e $\{u\}_2^T=\{1 \;\; -2\}^T$.

a) (30%) Representar graficamente o movimento $x_1(t)$ e $x_2(t)$ das duas massas do sistema para o primeiro modo natural de vibração;

b) (30%) Indicar um conjunto de condições iniciais a aplicar ao sistema de modo que este responda em regime livre com um movimento idêntico ao segundo modo natural de vibração;

c) (40%) Para uma solicitação harmónica $f_1(t)=F\sin\omega t$, caracterizar a resposta do sistema e representar graficamente a amplitude de resposta $X_2(\omega)$, indicando eventuais pontos notáveis.

3) (1.5 val.) O comportamento dinâmico de um sistema amortecido com n graus de liberdade é governado pelo sistema de equações diferenciais $[m]\{\ddot{x}(t)\}+[c]\{\dot{x}(t)\}+[k]\{x(t)\}=\{f(t)\}$ e pelas condições iniciais $\{x(t=0)\}=\{x\}_0$ e $\{\dot{x}(t=0)\}=\{\dot{x}\}_0$. A resposta dinâmica em regime forçado pode ser determinada por análise modal.

a) (35%) Indicar a(s) propriedade(s) em que assenta a técnica da análise modal e a(as) vantagem(s) desta técnica na determinação e análise do regime forçado.

b) (30%) Justificar a utilização de uma base modal truncada. Discutir a dimensão da base modal truncada (número de modos naturais) no caso de uma solicitação harmónica de frequência ω e no caso de uma solicitação transiente "rectangular" de duração t_c.

c) (35%) Em que condições os vectores modais do sistema conservativo podem ser utilizados para determinar o regime forçado do sistema amortecido? Demonstrar.

4) (1.5 val.) O quociente de Rayleigh é utilizado, entre outras aplicações, para estimar a frequência fundamental de vibração de um sistema discreto ou contínuo.

a) (60%) Referir a(s) propriedade(s) do quociente de Rayleigh e indicar quais os requisitos da aproximação da forma fundamental de vibração a utilizar no quociente de Rayleigh para:

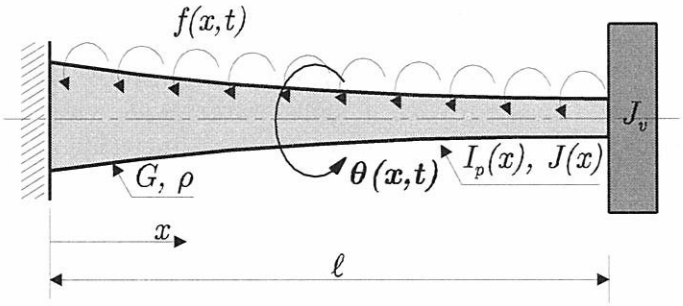
i. um sistema discreto; ii. um sistema contínuo.

b) (40%) Caracterizar o quociente de Rayleigh dum sistema linear discreto para um vector arbitrado $\{v\}$ que verifica a relação $\{v\}^T[m]\{\phi\}_1=0$, onde $[m]$ e $\{\phi\}_1$ representam, respectivamente, a matriz de massa e o primeiro vector modal do sistema.

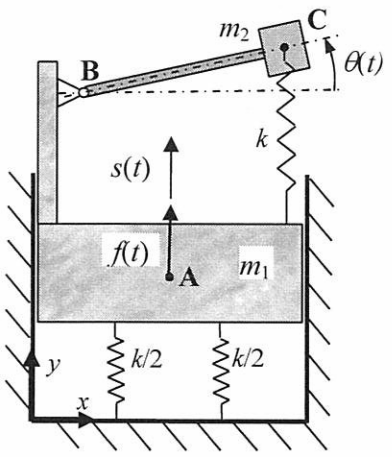
5) (1.5 val.) Na figura representa-se um veio de comprimento ℓ em vibração de torção $\theta(x,t)$.

a) (60%) Considerando um elemento infinitesimal de comprimento dx, estabelecer a equação diferencial de movimento e as condições de fronteira do veio representado.

b) (40%) Escrever as expressões integrais da energia elástica de deformação, da energia cinética e do trabalho das forças não conservativas.



FEUP, 23 de Junho de 2009



1) (6 val.) O sistema com dois graus de liberdade - $s(t)$ e $\theta(t)$ - representado na figura é constituído por um bloco e pelo pêndulo **BC**. O bloco tem massa m_1, está ligado a uma fundação por 2 molas lineares elásticas de rigidez $k/2$ e é actuado por uma força $f(t)$. O pêndulo **BC** é formado por uma viga rígida, de comprimento a ($\overline{BC} = a$) e de massa desprezável, e por uma massa m_2 localizada no ponto **C**. O mesmo pêndulo encontra-se ligado ao bloco por uma rótula plana em **B** e por uma mola linear elástica de rigidez k em **C**. Quando $\theta = 0$ rad e $s = 0$ m, o sistema está em equilíbrio estático.

a) (30%) Escrever as equações de movimento do sistema recorrendo ao formalismo de Lagrange.

b) (20%) Supondo que é aplicada uma excitação da forma $f(t) = F\cos(\omega t)$, com ω a frequência natural do sistema sem o pêndulo (i.e., o sistema formado apenas pelo bloco e molas que o ligam à fundação), determinar a expressão a que m_2 deve obedecer por forma que as vibrações do bloco cessem.

Para responder às alíneas seguintes admitir que as equações de movimento são:

$$\begin{bmatrix} 11 & 0.5 \\ 0.5 & 0.25 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{s}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2000 & 0 \\ 0 & 500 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} s(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

c) (20%) Determinar as frequências e as formas naturais de vibração do sistema.

d) (10%) Escrever as equações de movimento na base modal.

e) (20%) Supondo que $m_1 = 10$ kg, $m_2 = 1$ kg e $k = 2000$ N/m e considerando a resposta estacionária do sistema a uma força $f(t) = 10\cos(48t)$ N, obter, utilizando a análise modal truncada, uma estimativa para a força que as molas transmitem à fundação.

2) (6 val.) Na figura representa-se um veio de secção recta constante com momento polar I_p e de material com módulo de elasticidade transversal G e massa volúmica ρ. Na extremidade $x = 0$, o veio está ligado a uma mola de torção de rigidez k_t e em $x = \ell/2$ está montada uma roda de momento polar de inércia J.

a) (10%) Escrever e classificar as condições de fronteira do sistema.

b) (10%) Discutir, justificando, a aplicabilidade da função $\Theta(x) = \delta + \frac{x}{\ell}$ como aproximação da primeira forma natural de vibração no método de Rayleigh. Esboçar graficamente a função $\Theta(x)$.

Para $k_t = \alpha \frac{GI_p}{\ell}$ e $J = \beta \rho I_p \ell$,

c) (30%) Calcular a estimativa ω_{1R} da frequência natural de vibração utilizando o método de Rayleigh. Exprimir o resultado na forma $\omega_{1R} = \sqrt{\frac{G}{\rho \ell^2}} g(\delta, \alpha, \beta)$ onde $g(\delta, \alpha, \beta)$ representa uma função.

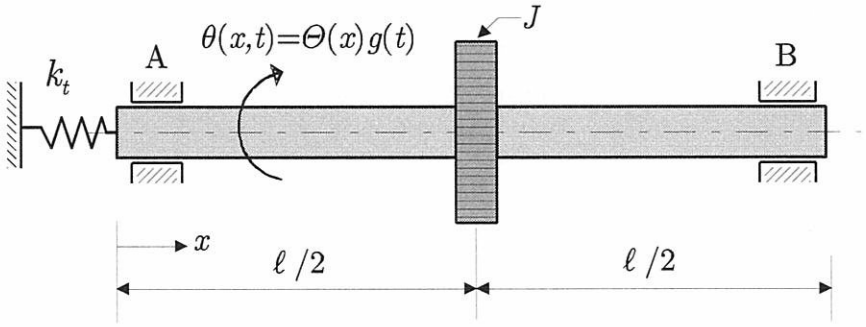
d) (15%) Discutir, justificando, a validade da solução obtida pelo método de Rayleigh para os valores limite de k_t : $k_t \to 0$ e $k_t \to \infty$.

Para $\alpha = 2$ e $\beta = 9$,

e) (15%) Determinar o valor óptimo do parâmetro δ da função $\Theta(x)$ como aproximação da primeira forma natural de vibração para o método de Rayleigh.

Para $J = 0$, utilizando a solução analítica exacta da torção para um veio de secção constante, $\theta(x,t) = \left(A \cos \frac{\omega}{c} x + B \sin \frac{\omega}{c} x \right) (C \cos \omega t + D \sin \omega t)$,

f) (20%) Estabelecer a equação de frequências naturais de vibração de torção para o veio considerado.



Feup, 23.06.2009